

LONGBOW E FISICA ELEMENTARE

di Dario D'Alù e Marco Dubini

Il nostro tipo di tiro con l'arco, in quanto "istintivo", si basa più sulle sensazioni che non sulla precisione di un mirino o l'utilizzo di una particolare lega ultra-leggera e resistente. Tuttavia non si deve pensare che i nostri archi siano degli oggetti grezzi, solo per il fatto che sono creati con materiali naturali (non di sintesi) e semplici d'aspetto. Gli archi che noi usiamo provengono da una lunga tradizione storica, vecchia quanto l'uomo e modificatasi con l'andare del tempo. Le migliori che di volta in volta la pratica del tiro dimostrava efficaci sopravvivevano, perché rendevano famoso il mastro d'arco; le modifiche meno efficaci morivano con il loro ideatore. Esistono dei motivi legati alla fisica elementare che rendono questi archi particolarmente efficaci. Tenteremo, nella prima parte dello scritto, di spiegarli senza utilizzare alcuna formula matematica.

La seconda parte del lavoro è più tecnica, ma per chi avrà la pazienza di leggerla con attenzione sarà, crediamo e speriamo, altrettanto utile.

Le frasi possono essere mal interpretate e quindi messe in discussione, mentre ciò non può avvenire per una formula.

L'arco perfetto.

Da sempre i costruttori e gli utilizzatori d'arco ricercano l'arco perfetto. In tal senso si devono intendere gli sforzi degli artigiani di tutte le epoche, i quali hanno dedicato la loro vita a questo scopo, raggiungendo effetti a volte stupefacenti.

Potrebbe sembrare impossibile mettere d'accordo tutti sulla definizione di arco perfetto; ognuno ha infatti la sua particolare idea. Invece non è così per quanto riguarda la dinamica classica che, più umilmente forse, non ha interesse per i materiali dai quali si ricava un arco e delle forme che questo assume (cioè di come si costruisce un arco).

Chiariamo innanzitutto che cosa sia un arco perfetto.

Un arco perfetto è un'arma in grado di rilasciare alla freccia tutta l'energia immagazzinata nell'atto del tendere.

Come vedremo, la cosa è meno banale di quel che sembra. Per chi si ricorda un po' di quella fisica studiata sui banchi di scuola, il concetto è molto simile a quello di "molla ideale".

Un arco di questo tipo, in realtà, non esiste. E' appunto l'araba fenice ricercata in ogni tempo dai mastri arcieri e dagli arcieri.

Tutti gli archi consumano una parte dell'energia di flessione per modificare la struttura delle parti che lo costituiscono; lo stesso discorso vale per la corda.

In breve non esistono materiali inestensibili. Questo fatto è stato ben compreso dai tiratori olimpionici che utilizzano materiali che consentono loro di sollecitare in maniera minima la loro attrezzatura.

Ma cosa succede se invece siamo costretti ad utilizzare libraggi elevati?

Energia immagazzinata ed elasticità

Quando è necessario avere potenza elevata, diventa indispensabile immagazzinare grandi quantità di energia nel nostro arco (ecco i libraggi che si alzano). Tale energia, però, deve essere rilasciata nuovamente alla freccia (senza stressare troppo i materiali), altrimenti il lavoro è stato inutile. L'arco deve quindi essere molto elastico. Difficile coniugare due concetti che sembrano opposti: archi duri (alte energie) e alta elasticità. Ancora una volta ci viene in aiuto la fisica che ci dice che elasticità e alta energia non sono concetti opposti, a patto di essere in grado di trasferire l'energia di tensione all'arco in maniera progressiva (reversibile, direbbe il mio vecchio professore di fisica).

Quindi il nostro arco ideale non sarà un arco che si apre a scatti e non sarà nemmeno un arco che ci fa fare fatica solo quando dobbiamo tendere ancora gli ultimi pochi centimetri; anzi, sarà un arco che si dimostrerà già duretto fin da principio.

Qui abbiamo il primo punto a favore del longbow. Il fatto di avere un arco faticoso fin da principio è garanzia di grande immagazzinamento di energia, indipendentemente dal libraggio indicato dal costruttore dell'arco. Che sia questo il motivo per cui le frecce che escono da un longbow sono piantate sempre con profondità maggiore? Anche.

Non dimentichiamo però un altro fattore: l'elasticità

Quanti di noi hanno provato a tirare con archi che "picchiavano in testa", le cui vibrazioni cioè erano tali da arrivare fino al nostro corpo tramite il braccio? Questo è un esempio di arco non elastico. In pratica l'energia che dovrebbe finire nella freccia finisce invece, sotto forma di vibrazione, nel legno, stressando i materiali e accorciandone al vita. Ora capite anche perché questo è un arco poco efficiente.

Abbiamo qui un secondo punto a favore del longbow. Con questo tipo di arco si è trovato il modo più semplice per evitare di stressare eccessivamente i materiali e quindi di utilizzarne al meglio l'elasticità. L'arco è diventato long-bow, cioè si è allungato. A parità di materiale utilizzato, più l'arco è lungo, meno viene sollecitato, quindi è maggiormente elastico (pensate di flettere uno spaghetti crudo e poi provate a fletterne la sua metà). Del resto questo "trucchetto" del far lavorare poco un arco è lo stesso che, in tempi più recenti, hanno sfruttato tutti quei costruttori d'arco che, pur volendo mantenere la medesima lunghezza di arco, hanno modificato il modello per far lavorare solo i flettenti.

Conclusioni

Come vedete le soluzioni che hanno portato al perfezionamento del longbow, e di tutti gli archi che gli assomigliano, in tutti i posti del mondo che avevano grandi quantità di legna da utilizzare per le armi, sono semplici, ma non sempliciotte. Sono le stesse che l'arciere più anziano ripete sempre, poiché fanno parte del bagaglio di ogni buon arciere:

- archi gradualmente
- archi senza vibrazioni

Non fatevi imbrogliare se queste caratteristiche fanno sì che la freccia esca dal vostro longbow una frazione di secondo dopo; la freccia viene accelerata per un tempo più lungo e quando esce dall'arco non è più lenta. Basta andare a controllare il bersaglio per convincersene.

Meccanica di un Arco ed energia accumulata

In precedenza abbiamo ricordato che un arco non è altro che una molla e come tale obbedisce alle leggi della fisica.

Per quanto possa sembrare strano, non è per nulla semplice descrivere il comportamento dinamico dell'arco per mezzo di banali equazioni matematiche.

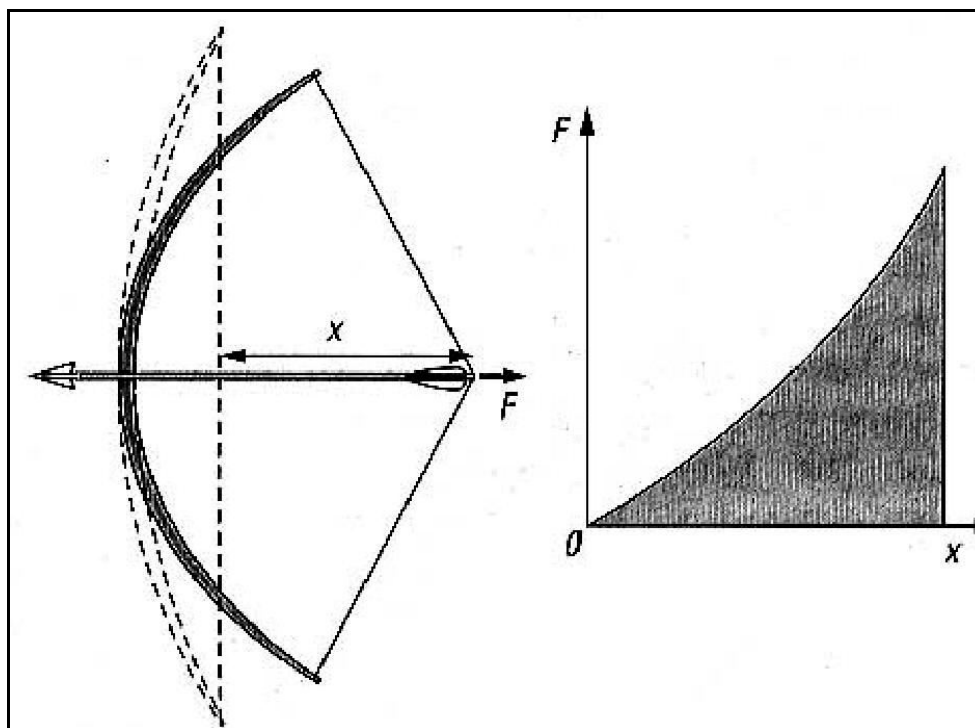
Le ragioni di questa difficoltà risiedono principalmente nel fatto che i materiali utilizzati per costruire un arco sono "organici" e come tali "non omogenei", "complessi".

La fisica (o meglio la meccanica razionale) descrive per mezzo di equazioni matematiche il comportamento di modelli cinematica che **approssimano** l'oggetto reale da analizzare.

Una normale assicella di legno flettendosi, si comporta come una molla ideale per le deformazioni (piccole) che non chiamano in causa la modifica della sottostruttura microscopica (le fibre vegetali), mentre si comporta in modo assolutamente poco prevedibile per flessioni e sollecitazioni più pronunciate sino a giungere all'evento improvviso e catastrofico della rottura.

Tra i diversi tentativi seguiti per realizzare un modello matematico di un arco, a noi interessano particolarmente quelli che si riferiscono all'arco lungo inglese "long-bow"; in particolare siamo interessati agli studi fatti per poter ricostruire, sulla base di modelli (validati in laboratorio), le caratteristiche dinamiche degli archi utilizzati in battaglia dai nostri antenati.

Un punto di partenza per lo studio dell'arco come mezzo per proiettare la freccia il più lontano ed il più efficacemente possibile, è quello di studiarlo come sistema meccanico che segue il principio di conservazione energia e verificarne le caratteristiche dinamiche, le efficienze, l'utilizzabilità, ecc.



Se l'arco fosse una molla ideale semplice (modulo elastico infinito, massa nulla, deformazione nulla, corda inestensibile,) accumulerebbe un'energia potenziale proporzionale alla forza antagonista e all'allungo pari a:

$$E_{id} = \frac{F_{id}x}{2}$$

dove:

E_{id} = Energia potenziale accumulata

F_{id} = Forza dell'arco all'allungo x

Poiché l'arco non è una molla perfetta, risulterà che la forza necessaria per tenderlo non sarà direttamente proporzionale all'allungo; solitamente, infatti, negli archi si nota un certo "indurimento" o "ruvidità" già ad allunghi poco superiori alla metà di quello nominale.

Se scrivessimo l'equazione dell'energia accumulata considerando la forza come funzione dell'allungo otterremmo:

$$E_p = \int_x [F(x) ?x] dx$$

Per semplificare i calcoli possiamo approssimare la funzione precedente introducendo nei calcoli un coefficiente d'efficienza dell'arco [e] che caratterizzi l'arco reale rispetto a quello ideale.

Possiamo così riscrivere la nostra formula come:

$$E_p = e \frac{F ?x}{2}$$

Prove di laboratorio dimostrano che, per archi lunghi in legno di tasso (è il legno con le caratteristiche meccaniche più adatte alla realizzazione di un arco) il coefficiente [e] può variare tra 0.8 e 0.9 e diminuisce progressivamente all'aumentare dell'allungo.

Trasferimento d'energia e dissipazione

Il fine ultimo dell'accumulo d'energia nell'arco è di trasferirla in maniera pressoché completa alla freccia.

La misura dell'efficacia dell'attrezzo dipende dal rapporto tra, l'energia immagazzinata nell'arco e quella trasferita alla freccia immediatamente dopo il suo distacco dalla corda.

L'energia cinetica della freccia si può facilmente scrivere come funzione della sua velocità d'uscita dall'arco:

$$E_c = \frac{m ?v^2}{2}$$

dove:

E_c = Energia cinetica della freccia

m = Massa della freccia

v^2 = velocità d'uscita della freccia

Ipotizzando un arco "perfetto", in grado quindi di fornire alla freccia tutta l'energia accumulata, otterremmo un tiro assolutamente silenzioso ed indolore.

Non noteremmo infatti:

- le fastidiose vibrazioni o i contraccolpi
- i segni violacei sull'avambraccio causati dal ritorno della corda
- il rumore causato dall'aria spostata dai flettenti
- il progressivo riscaldamento dei materiali
- le rotture dei flettenti

Poiché la nostra esperienza ci ha portato ad osservare e a subire, purtroppo, le conseguenze di questi fenomeni, possiamo affermare che:

l'energia che li ha provocati non può essere altro che energia che noi abbiamo trasferito all'arco e che l'arco non ha trasferito alla freccia.

Esistono due principali fenomeni che avvengono durante la scoccata che non consentono un completo trasferimento di energia alla freccia:

- Fenomeni non-dissipativi. *Es. energia necessaria per muovere i flettenti*
- Fenomeni dissipativi *Es. energia dissipata nell'arco a causa di attriti dinamici*

Un'analisi puntuale di tutti i fenomeni non-dissipativi che concorrono a perdere energia durante la scoccata, esula da questa trattazione, ed ecco perché, ancora una volta, cercheremo di riassumere il tutto in un solo coefficiente di *perdita di efficienza* [**k**].

Questo parametro dipende fortemente dalla morfologia dell'arco, aumenta all'aumentare della deformazione dei materiali, aumenta all'aumentare del rapporto tra la sezione media e la lunghezza del flettente, all'aumentare della massa dell'arco, ecc.

La perdita di energia connessa con questi fenomeni è poi direttamente proporzionale al quadrato della velocità con la quale si muovono i flettenti dell'arco; potremo quindi scrivere:

$$E_{cfl} = k \frac{M v^2}{2}$$

dove

E_{cfl} = Energia cinetica dei flettenti

M = Massa dell'arco

v^2 = velocità d'uscita della freccia

k = coefficiente d'efficienza

Esperimenti e opportuni modelli matematici dimostrano che, per gli archi che stiamo trattando, questo valore è compreso tra:

$$0.03 \leq k < 0.07$$

a seconda della geometria dell'arco e alla disposizione delle masse nei flettenti.

Anche l'analisi dei fenomeni di tipo dissipativo che concorrono a far perdere energia durante la scoccata, esula da questa trattazione, ed ecco perché, cercheremo di riassumere il tutto in un solo coefficiente di *attrito dinamico* [b].

L'analisi del moto uniformemente accelerato ci suggerisce che l'attrito dinamico dell'arco, ovvero principalmente l'attrito che i fasci adiacenti di fibre del legno esercitano tra di loro durante la deformazione dei flettenti, sia assimilabile ad un attrito di tipo "viscoso".

La forza risultante da un attrito di tipo viscoso è direttamente proporzionale alla velocità del sistema ovvero:

$$F(t)_a = b \cdot v(t)$$

Normalizzando la forza di attrito e considerandone la componente nella stessa direzione del moto avremo che l'energia associata a questa forza sarà:

$$E_a = \int_x F(t)_a \cdot dx = \int_x b \cdot v(t) \cdot dx$$

Se consideriamo la velocità di spostamento del punto di "incocco" come velocità del sistema, e "l'allungo" come distanza percorsa, si ottiene che, nel nostro caso:

$$v(t) \propto x$$

$$E_a \propto x^2$$

Normalizzando il tutto per mezzo di un coefficiente che chiameremo [b] si può scrivere:

$$E_a = b x^2$$

Il coefficiente [b] può variare tra:

$$5 \leq b < 300$$

a seconda delle deformazioni e delle caratteristiche dei materiali.

In particolare, a parità di materiale impiegato, il valore di [b] aumenta all'aumentare del rapporto tra sezione e lunghezza del flettente. Per flettenti "snelli", dove gli strati di fibre flesse praticamente non scorrono tra loro si ottengono valori molto bassi:

$$5 \leq b < 20$$

per flettenti massicci, dove gli strati di fibre flesse scorrono significativamente tra di loro e alcuni strati di fibre vengono compressi in maniera "anelastica", si ottengono valori decisamente più alti:

$$150 \leq b < 400$$

Velocità di uscita della freccia e gittata massima

Poiché l'arco come tutti i sistemi meccanici rispetta il principio di conservazione dell'energia, potremo scrivere il suo bilancio energetico come segue:

$$E_c + E_{cfl} + E_a = E_p = k \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + bx^2 = e \frac{Fx}{2} \quad v^2 (Mk + m) = eFx - 2bx^2$$

risolvendo secondo v = velocità d'uscita della freccia otterremo:

$$v = \sqrt{\frac{eFx - 2bx^2}{m + KM}}$$

La velocità d'uscita della freccia quindi:

- *aumenta* all'aumentare della forza dell'arco
- *aumenta* all'aumentare dell'allungo della trazione
- *diminuisce* all'aumentare della massa della freccia
- *diminuisce* all'aumentare della massa dell'arco
- *diminuisce* all'aumentare del "coefficiente di efficienza"
- *diminuisce* all'aumentare del "coefficiente di attrito"

Utilizzando un tiro di tipo "balistico" a 45° e trascurando la resistenza dell'aria, la gittata massima di un generico proiettile dipende solo dalla sua velocità iniziale ed è pari a:

$$d = \frac{v^2}{g}$$

dove:

d = distanza del tiro

g = accelerazione di gravità [$\sim 9.81 \text{m/s}^2$]

v^2 = velocità iniziale del proiettile

La resistenza dell'aria, come sperimentiamo tutti i giorni, non è trascurabile, inoltre il nostro proiettile è una freccia che tende a "volare" e quindi a comportarsi come un aeromobile.

Semplificando i risultati derivanti da alcune leggi dell'aerodinamica¹ (troppo complesse per essere utilizzate direttamente), si può approssimare ragionevolmente il comportamento del volo di una freccia nell'aria.

La forza che si oppone all'avanzamento della freccia si potrà scrivere come:

$$F_{res} = c \cdot v^2$$

dove:

c = coefficiente di forma (descrive capacità di penetrazione e l'eventuale effetto delle appendici aerodinamiche)

v^2 = velocità istantanea dell'oggetto

confortate da esperimenti condotti in galleria del vento

L'approssimazione della dinamica del volo della freccia in aria secondo la legge quadratica descritta sopra sarà:

$$d = \frac{v^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{cv^2}{mg} \sqrt[0.74]{\quad}}$$

dove

d = distanza del tiro

¹ confortate da esperimenti condotti in galleria del vento da Gareth Rees studioso di Aerodinamica Molecolare ed appassionato di Arceria Medievale Longbow e fisica elementare

g = accelerazione di gravità [$\sim 9.81\text{m/s}^2$]

v^2 = velocità d'uscita della freccia

m = massa della freccia

c = coefficiente di forma della freccia

L'interpretazione di questa formula ci mostra come al diminuire della massa della freccia diminuisca anche la sua gittata a parità di velocità d'uscita.

Simulazioni numeriche

Proviamo a simulare il comportamento che poteva avere un arco inglese, come quelli ritrovati a bordo del relitto della Mary Rose, tramite il modello matematico descritto in precedenza.

Per “validare” questo modello verificheremo, in altra sede, le differenze tra i risultati teorici e quelli sperimentali applicati ad una “replica” da ~60 lb di un arco inglese, realizzata in legno di tasso ed utilizzata normalmente durante le rievocazioni storiche.

Con i parametri mostrati sotto si può descrivere e simulare il comportamento di un arco “leggero” come le repliche utilizzate attualmente durante le rievocazioni storiche.

F	Forza ad allungo x	59.86[lb] 266.0[N]	Ep	Energia fornita arciere	96.45[J]
x	allungo	32[inch] 0.813[m]	Efl	Energia dissipata	47.44[J]
M	Massa arco	0.5[Kg]	Ec	Energia Freccia	49.01[J]
m	massa Freccia	0.03[Kg]	vf	Velocita' d'uscita freccia	57.16[m/s]
e	efficienza arco	0.892	dft	Gittata freccia (teorica)	333.03[m]
K	movimentazione arco	0.05	df	Gittata freccia (pesata)	208.08[m]
b	dissipazione e attriti	2C		Energia richiesta per 100 tiri	2.3C[Kcal]
c	coefficiente penetrazione	0.00008[Ns ² /m ²]			

Quest'arco può sopportare efficacemente un allungo completo (quello naturale per la nostra taglia media 30/32”) mostrando attriti interni all'arco e allungamento della corda molto contenuti.

Si può descrivere e simulare il comportamento dell'arco ritrovato sul relitto della nave inglese “Mary Rose” studiato da Paterson e Clarke ed identificato dal numero A812, per mezzo dei seguenti parametri²:

F	Forza ad allungo x	156.66[lb] 696.2[N]	Ep	Energia fornita arciere	211.02[J]
x	allungo	3C[inch] 0.762[m]	Efl	Energia dissipata	123.63[J]
M	Massa arco	1[Kg]	Ec	Energia Freccia	87.35[J]
m	massa Freccia	0.06[Kg]	vf	Velocita' d'uscita freccia	53.97[m/s]
e	efficienza arco	0.796	dft	Gittata freccia (teorica)	296.93[m]
K	movimentazione arco	0.05	df	Gittata freccia (pesata)	220.52[m]
b	dissipazione e attriti	175		Energia richiesta per 100 tiri	5.04[Kcal]
c	coefficiente penetrazione	0.0001[Ns ² /m ²]			

In particolare il coefficiente di attrito risulta essere più alto per tener conto del rapporto tra la sezione del flettente e la sua deformazione. Anche il coefficiente di penetrazione della freccia è stato aumentato per tener conto della maggiore sezione frontale della stessa.

Notiamo come, la *gittata massima pesata* e la *velocità d'uscita* della freccia non siano molto dissimili tra i due modelli.

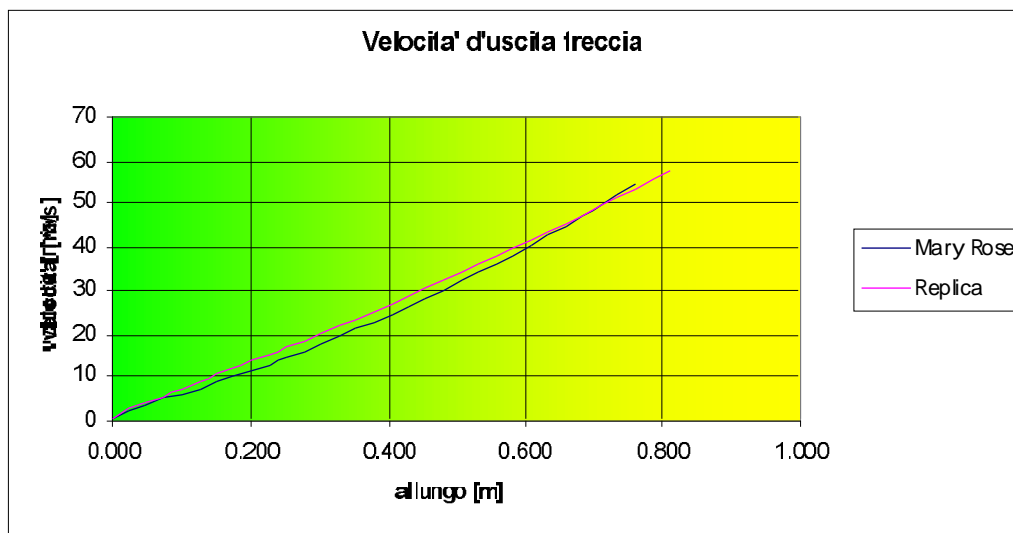
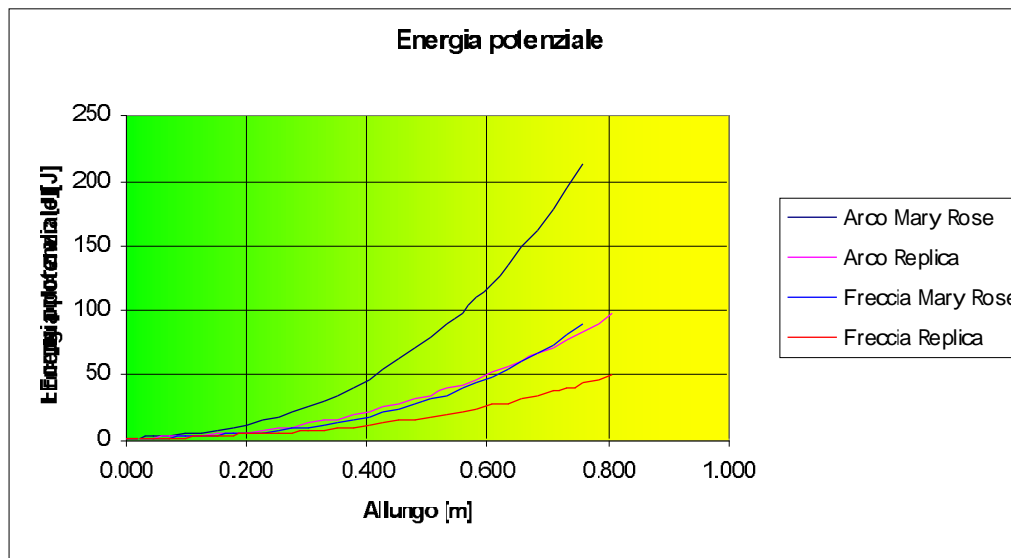
² Questa simulazione, ovviamente, non fa alcuna ipotesi sulla morfologia dell'arciere in grado di poter tendere senza problemi un arco da 160 libbre (~72Kg) ad un allungo di 30” e non soffrire alcuna conseguenza fisica in seguito al rilascio di frecce da 60 grammi.

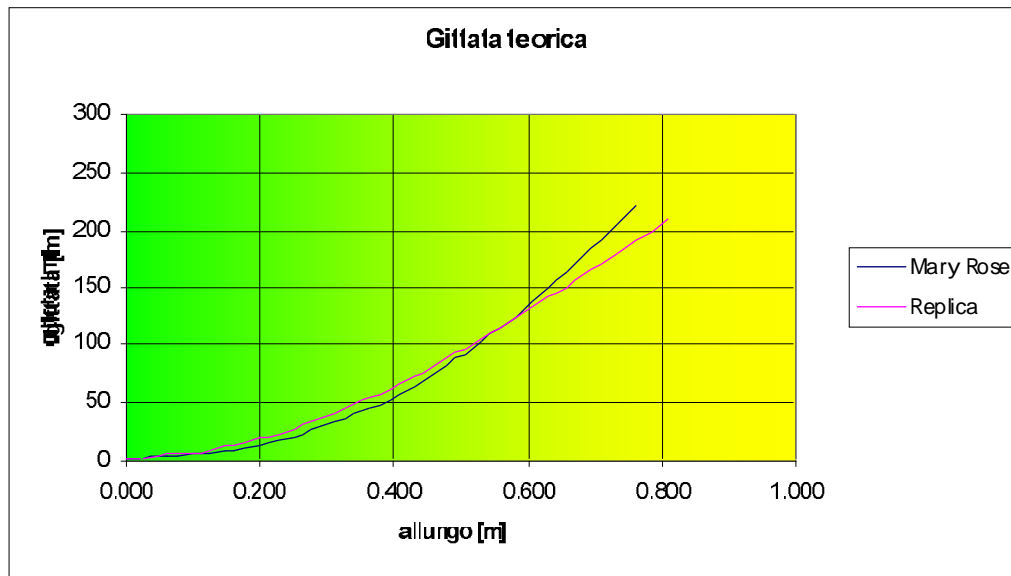
Ciò che cambia è l'energia in gioco; quella richiesta per il tiro con l'arco "leggero" è meno della metà di quella richiesta dall'arco "Mary Rose".

Alla freccia dall'arco "Mary Rose" sarà trasferita un'energia pari al 45% di quella impiegata per tendere l'arco, mentre a quella relativa all'arco leggero ne sarà trasferita il 50%.

Per i due archi sopra citati mostriamo, di seguito, alcuni grafici relativi alle simulazioni matematiche effettuate.

Questi grafici descrivono il comportamento delle principali grandezze in gioco in funzione dell'apertura o allungo.





Efficacia della freccia e conclusioni

La velocità di arrivo della freccia sul bersaglio, non può certamente essere quella d'uscita, questa sarà, infatti, sensibilmente diminuita a causa dell'attrito con l'aria.

Le formule per determinare la velocità residua di un "proiettile" in volo in un fluido, sono ancora più complesse di quelle mostrate in precedenza; per quantificare le perdite, perciò, ci riferiremo ad alcuni risultati sperimentali.

Questi risultati mostrano, per il tiro a gittata massima effettuato con frecce con impennaggio corto massa pari a circa 40÷50g, una riduzione di velocità pari a circa il 40÷50% rispetto a quella iniziale.

Ricordando che:

$$E_c = \frac{m v^2}{2}$$

- l'energia cinetica della freccia è proporzionale al quadrato della sua velocità:
- alla freccia viene trasferita un'energia pari a circa il 50% di quella impiegata per tendere l'arco

Otteniamo che l'energia residua delle frecce al momento dell'impatto dopo un tiro a gittata massima sarà dell'ordine del 25% di quella che avevano al momento del distacco dalla corda ovvero circa il **10÷12% di quella impiegata dall'arciere per tendere l'arco.**

In conclusione:

- Il vantaggio di *libraggi* molto elevati per archi da battaglia può essere individuato nella capacità di fornire energie elevate a frecce "pesanti" pur mantenendo una velocità d'uscita della freccia compatibile con le caratteristiche elastiche dei materiali utilizzati per la costruzione degli archi stessi.
- Il tiro a "lunga gittata" è un tipo di tiro a basso coefficiente di offesa a causa della grande quantità di energia che la freccia perde durante il volo

Bibliografia:

- | | | |
|---|------------------------------------|-------------------------------|
| G. Rees | THE PHYSICS OF MEDIEVAL ARCHERY | <i>Stortford Archery Club</i> |
| B.W. Kooi
<i>of Archer Antiquaries</i> | ARCHERY AND MATHEMATICAL MODELLING | <i>Journal of the Society</i> |
| R. Resnik D. Halliday | PHYSICS – “Part One” | <i>John Wiley & Sons</i> |

Aprile 2004